

## PLATON ET LES MATHÉMATIQUES

par André Ross  
 professeur de mathématiques  
 Cégep de Lévis-Lauzon

Platon est né à Athènes vers 427 av. J.-C., à l'époque de la mort de Périclès. Disciple de Socrate, il se retira à Mégare lorsque celui-ci fut condamné à boire la ciguë (vers 399). Le désir de s'instruire le pousse à voyager et vers ~390, il se rend en Égypte, puis à Cyrène, où il reçoit l'enseignement du mathématicien Théodore, dont il devait faire un des interlocuteurs du *Théétète*. De Cyrène, il passe en Italie, où il se lie d'amitié avec les Pythagoriciens Philolaos, Archytas et Timée. À leur contact, il approfondit ses connaissances en arithmétique, en astronomie et en musique. Après son séjour en Italie, il se rend en Sicile, visite Catane et l'Etna puis retourne à Athènes, vraisemblablement en ~388, et fonde une école de philosophie, l'Académie, à l'image des sociétés pythagoriciennes.

Dans cet article, nous allons présenter quelques extraits du *Timée* qui permettent de comprendre l'utilisation que Platon a fait des mathématiques dans l'élaboration de sa philosophie.

### LA CONNAISSANCE

Platon doit aux pythagoriciens l'idée de l'éternité de l'âme, qui devait devenir la pierre angulaire de sa philosophie. Cette idée lui fournit la solution du problème de la connaissance. Pour Platon, l'âme est immortelle et elle a la possibilité de contempler le monde des Idées entre chaque réincarnation. La connaissance est obtenue en retrouvant le souvenir de ces Idées, c'est la réminiscence. L'extrait suivant du *Timée* illustre sa solution.

*Mais, si nous proposons des explications qui ne sont pas des images plus infidèles qu'une autre, il faut nous en contenter, en nous souvenant que moi qui parle et vous qui êtes mes juges sommes d'humaine nature, de sorte que, si, en ces matières, on nous propose un mythe vraisemblable, il ne sied pas de chercher plus loin.*

*Socrate lui répond:*

*Parfait, Timée, il faut absolument souscrire aux conditions que tu viens de poser.*

Pour Platon, il n'est nul besoin d'autres preuves que la vraisemblance de l'explication puisque c'est par la réminiscence que l'on parvient aux Idées. L'explication qu'il va donner de la création de l'Univers est obtenue de cette façon.

### L'UNIVERS

*Ainsi donc, conformément à une explication qui n'est que vraisemblable, il faut dire que notre monde, qui est un vivant doué d'une âme pourvue d'un intellect a, en vérité, été engendré par suite de la décision réfléchie d'un dieu.*

Pour Platon, l'Univers est un organisme vivant doté d'une âme et d'une intelligence. Cette conception de l'Univers ne sera remplacée qu'au XVII<sup>e</sup> siècle avec le développement de la mécanique et la fabrication des premières horloges mécaniques. L'univers sera alors représenté comme un mécanisme, généralement une horloge et Dieu comme un horloger. L'univers est, dans cette conception, une preuve de l'existence de Dieu. Une horloge peut-elle exister sans qu'un horloger ne l'ait fabriquée?

*C'est évidemment corporel que doit être le monde engendré, c'est-à-dire visible et tangible. Or, sans feu rien ne saurait devenir visible (voir encadré sur l'optique); et rien ne saurait devenir tangible sans quelque chose qui soit solide; or rien ne saurait être solide sans terre. De là vient que c'est avec du feu et avec de la terre que le dieu, lorsqu'il commença de le constituer, fabriqua le corps du monde.*

Dans cet extrait, Platon explique pourquoi la terre et le feu, deux des éléments d'Empédocle d'Agrigente, ont été utilisés pour construire l'Univers. Mais il n'est pas suffisant d'avoir des éléments pour construire, il faut lier les éléments entre eux. C'est ce qu'explique Platon dans le paragraphe suivant :

*Mais deux éléments ne peuvent seuls former une composition qui soit belle, sans l'intervention d'un troisième; il faut en effet, entre les deux un lien qui les réunisse. Or, de tous les liens, le plus beau, c'est celui qui impose à lui-même et aux éléments qu'il relie l'unité la plus complète, ce que, par nature, la proportion réalise de la façon la plus parfaite. Chaque fois que de trois nombres quelconques, que ces nombres soient entiers ou en puissance, celui du milieu est tel que ce que le premier est par rapport à lui, lui-même l'est par rapport au dernier; et inversement quand ce que le dernier est par rapport à celui du milieu, celui du milieu l'est par rapport au premier, celui du milieu devenant alors premier et dernier, le dernier et le premier devenant à leur tour moyens, il en résulte nécessairement que tous se trouvent être dans une relation d'identité, et que, parce qu'ils se trouvent dans cette relation d'identité les uns par rapport aux autres, ils forment tous une unité.*

Les Pythagoriciens ont consacré beaucoup de leur temps à l'étude des proportions. Pour eux, les rapports entre les nombres décrivent la façon dont l'Univers est construit. Dans une proportion, les moyens (médiétés) sont un lien entre les extrêmes. Platon a recours à cette notion de médiété, nous dirions aujourd'hui *moyens proportionnels* et *moyenne proportionnelle*, pour expliquer le rapport liant les éléments feu et terre. Ce rapport justifie l'existence des deux autres éléments d'Empédocle : l'eau et l'air.

*Cela dit, si le corps de l'univers avait dû être une surface, dépourvue de toute profondeur, une seule médiété eut suffi à établir un lien entre les autres termes qui l'accompagnent et lui-même. Il convenait que ce monde fut un solide et, en ce qui concerne les solides, ce n'est jamais une seule médiété, mais toujours deux qui établissent une proportion. Voilà bien pourquoi le dieu, ayant placé au milieu entre le feu et la terre, l'eau et l'air, et ayant introduit entre eux, autant que c'était possible, le même rapport, qui fasse ce que le feu est à l'air, l'air le soit à l'eau, et que ce que l'air est à l'eau, l'eau le soit à la terre, a constitué à l'aide de ces liens un monde visible et tangible. L'accord qu'il manifeste, il le tient de la proportion géométrique; et les rapports instaurés par cette pro-*

## L'OPTIQUE DES PENSEURS GRECS

Démocrite pense que les corps lumineux émettent des particules qui viennent influencer l'oeil. Pour d'autres philosophes, ce sont des corpuscules émis par l'oeil qui, heurtant les objets, les rendent visibles. Platon croit plutôt que l'oeil et l'objet observé émettent des particules dont la rencontre provoque le phénomène de vision. Pour émettre de telles particules, un corps doit comporter une certaine proportion de l'élément feu.

Quand donc la lumière du jour entoure le flux issu des yeux, alors le feu intérieur qui s'échappe, le semblable allant vers le semblable, après s'être combiné avec la lumière du jour se constitue en un seul corps ayant les mêmes propriétés tout le long de la droite issue des yeux, quelque soit l'endroit où le feu jaillit de l'intérieur entre en contact avec le feu qui provient des objets extérieurs.

Mais, lorsque le feu extérieur se retire pour faire place à la nuit, il se trouve coupé du feu intérieur qui lui est apparenté. En effet, comme en sortant il tombe sur quelque chose qui n'est pas semblable à lui, le feu intérieur devient autre et s'éteint, n'ayant plus de communauté de nature avec l'air environnant, puisque celui-ci ne contient plus de feu.

*portion lui apportent l'amitié, de sorte que, rendu identique à lui-même, il ne peut être dissous par personne d'autre que par celui qui a établi ces liens.*

## MÉDIÉTÉS ET PROPORTIONS

Selon Platon, le monde est constitué de quatre éléments. Pourquoi quatre? Il y a d'abord l'élément terre, car l'univers est tangible puis l'élément feu car l'univers est visible. Pour réunir ces deux éléments, il en faut au moins un autre qui définira le rapport entre les deux premiers. S'il y avait seulement trois éléments, l'Univers serait un plan et non un solide. Pourquoi? Parce que pour construire une proportion avec des nombres plans, il suffit de trois termes, qui constituent alors la proportion suivante :

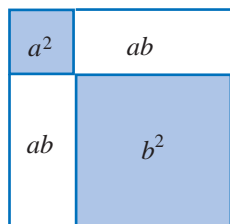
$$\frac{a^2}{ab} = \frac{ab}{b^2}$$

Ces trois termes sont reliés par le développement

binomial suivant :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

La construction géométrique basée sur ces trois éléments,  $a^2$ ,  $ab$  et  $b^2$  est la suivante :



On constate donc qu’une construction géométrique ne comportant que deux éléments et une médiété est plane. Cependant, l’univers n’est pas plan, il est solide (tridimensionnel). Il ne peut donc être constitué de seulement trois éléments.

Entre deux nombres solides, deux moyennes géométriques sont nécessaires, soit  $a^2b$  et  $ab^2$ , en effet :

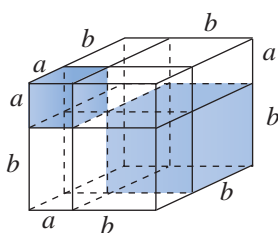
$$\frac{a^3}{a^2b} = \frac{ab^2}{b^3}$$

comme on le constate en simplifiant les rapports de la proportion. Ainsi, pour construire un Univers solide (tridimensionnel), il faut quatre composantes qui sont :

$$a^3, a^2b, ab^2, b^3$$

L’Univers doit donc être constitué de quatre éléments, soit: terre, eau, air et feu, dont le rapport est :

$$\frac{\text{feu}}{\text{air}} = \frac{\text{eau}}{\text{terre}}$$



Ces quatre termes sont reliés par le développement binomial suivant :

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

### FORME DE L’UNIVERS

L’Univers est donc constitué de quatre éléments, mais quelle est sa forme ? Quelle est sa figure ?

*Comme figure, il lui donna celle qui lui convenait et qui lui était apparentée. Au vivant qui doit envelop-*

*per tous les vivants, la figure qui pourrait convenir, c’était celle où s’inscrivent toutes les autres figures. Aussi est-ce la figure d’une sphère dont le centre est équidistant de tous les points de la périphérie, une figure circulaire, qu’il lui donna comme s’il travaillait sur un tour –figure qui entre toutes est la plus parfaite et la plus semblable à elle-même– convaincu qu’il y a mille fois plus de beauté dans le semblable que dans le dissemblable.*

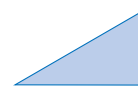
Platon a de nouveau recours à la géométrie pour décrire la forme de l’Univers. C’est la sphère, figure parfaite qui a servi pour concevoir le plan de l’Univers.

*Tel fut au total le plan du dieu [...]. En conformité avec ce plan, il fit un corps lisse et uniforme, en tout point équidistant de son centre, un corps complet, un corps parfait constitué de corps parfaits. [...] Il a ainsi constitué un ciel circulaire entraîné bien entendu dans un mouvement circulaire, un ciel unique, seul de son espèce, solidaire, mais capable en raison de son excellence de vivre en union avec lui-même, sans avoir besoin de quoi que ce soit d’autre, se suffisant à lui-même comme connaissance et comme ami.*

### TRIANGLES ET CORPS RÉGULIERS

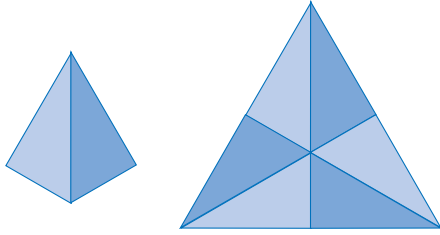
Platon s’intéresse également aux solides que l’on peut construire à partir de triangles élémentaires.

*On commencera par la première espèce, celle qui est la plus petite par sa composition; elle a pour élément le triangle dont l’hypoténuse a une longueur double du plus petit côté.*

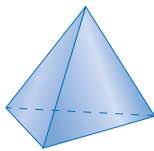


Ce triangle rectangle est également connu pour avoir des angles aigus de  $30^\circ$  et  $60^\circ$ .

*Si on juxtapose deux triangles de cette sorte par leur hypoténuse, et si on répète l’opération trois fois en faisant se rejoindre les hypoténuses et les petits côtés en un même point comme en un centre, on engendre un triangle équilatéral unique à partir de triangles élémentaires au nombre de six.*

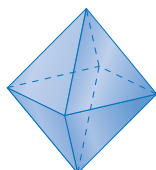


Quatre de ces triangles équilatéraux forment, à raison de trois angles plans, un seul angle solide celui qui vient juste après le plus obtus des angles. Et lorsque quatre de ces angles sont formés, se trouve constituée la première espèce de solide qui divise un tout sphérique en parties égales et semblables.



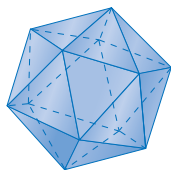
Tétraèdre

La seconde espèce est constituée à partir des mêmes triangles, qui s'unissent par groupes de huit triangles équilatéraux pour former un seul angle solide à partir de quatre angles plans. Et quand se constituent six angles de ce genre, le second corps se trouve à son tour réalisé.



Octaèdre

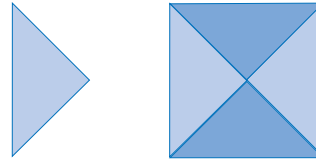
La troisième espèce est formée par l'agrégation de cent vingt triangles élémentaires, de douze angles solides, chacun de ces angles étant délimité par cinq triangles plans équilatéraux, et elle a vingt faces qui sont autant de triangles équilatéraux.



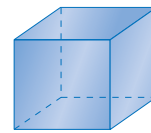
Icosaèdre

Le premier des triangles élémentaires fut laissé de côté quant il eut engendré ces solides.

Pour sa part, le triangle isocèle engendre la nature du quatrième corps, qui est constitué de quatre triangles isocèles, qu'on réunit en un centre par leurs angles droits et qui forment un seul quadrilatère équilatéral;

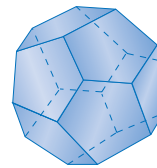


Lorsque six surfaces de ce genre se sont agrégées, elles ont donné naissance à huit angles solides dont chacun est constitué de trois angles plans, qui sont des angles droits. La figure du corps ainsi constituée fut celle du cube, qui a six faces planes, rectangulaires, équilatérales.



Hexaèdre

Il restait une seule construction, la cinquième; le dieu s'en servit pour l'univers, lorsqu'il y peignit des figures animales.



Dodécaèdre

## FORME DES ÉLÉMENTS

Platon a adopté la théorie d'Empédocle d'Agrigente à l'effet que l'univers est composé de quatre éléments: terre, eau, air et feu et il associe les atomes de chacun de ces éléments à un des solides réguliers qui sont maintenant appelés *corps réguliers de Platon*.

Dans sa théorie, l'atome de feu est de forme tétraédrique, l'atome de terre est hexaédrique, (cube), l'atome d'air est un octaèdre et l'atome d'eau est un icosaèdre et le dodécaèdre est utilisé pour les formes animales. Pourquoi cette association? Timée explique que :

Et ces genres, dont nous venons de décrire la naissance, distribuons-les entre le feu, la terre, l'eau et l'air. À la terre donc, attribuons la forme du cube. Car, de ces quatre éléments, la terre est celui qui est

le plus difficile à mouvoir, et le plus plastique des corps; et nécessairement c'est celui qui a les bases les plus stables, qui possède le plus ces qualités. Or, entre les triangles dont nous avons supposé l'existence à l'origine, la base qui est formée de côtés égaux est par nature plus stable que celle qui est formée de côtés inégaux; et en même temps, en ce qui concerne la surface équilatère constituée à partir de chacun d'eux, le carré constitue nécessairement une base plus stable que le triangle équilatéral, dans ses parties et comme tout. Par suite, en attribuant cette surface à la terre, nous sauvegardons la vraisemblance de notre explication, tout de même qu'en attribuant tour à tour à l'eau, la forme la moins mobile de celles qui restent, au feu, la forme la plus mobile, et à l'air celle qui est intermédiaire; qu'en attribuant au feu le corps le plus petit, à l'eau, le corps le plus grand, et à l'air, celui du milieu; et qu'en attribuant au feu ce qui est le plus aigu, à l'air ce qui vient au second rang, et à l'eau, ce qui vient au troisième rang. Et bien entendu, parmi tous ces corps, celui qui a les faces les plus petites est forcément le plus mobile, puisqu'il est de partout le plus coupant et le plus aigu de tous; c'est encore le plus léger, puisqu'il est composé du moins grand nombre des mêmes parties. Et le second corps doit tenir le second rang pour ce qui est des mêmes propriétés; et le troisième, le troisième rang. Admettons donc que, conformément à la droite raison et conformément à l'explication vraisemblable que nous proposons, la figure solide de la pyramide est l'élément de base et le germe du feu; le second solide dans l'ordre des naissances, disons que c'est celui de l'air; et que le troisième, c'est celui de l'eau.

## CONCLUSION

Pour Platon, l'âme est immortelle. Elle a existé avant nous et passera dans d'autres corps après nous. L'âme a contemplé le monde des Idées entre deux réincarnations et la connaissance est acquise par la réminiscence, processus par lequel l'âme retrouve le souvenir des Idées. Avec une telle croyance, nul besoin d'expérimenter. La connaissance s'acquiert exclusivement par le raisonnement. De plus, si on trouve une explication plausible, c'est certainement la bonne explication puisqu'elle est acquise par la réminiscence, c'est l'Idée qui est retrouvée par l'âme.

Platon croyait en l'existence d'un monde parfait de nature géométrique et a proposé le système géocentrique classique. Pour lui, la Terre est sphérique et fixe. Son centre géométrique coïncide avec le centre de l'univers. La Lune, le Soleil et les planètes tournent autour de ce centre selon des orbites circulaires parfaites décrites à vitesse angulaire constante. Les étoiles sont sur une sphère appelée *sphère des fixes* qui est en mouvement régulier autour de la Terre. Le nom *sphère des fixes* vient du fait que les positions relatives des étoiles semblent fixes.

Cette théorie n'expliquait pas les mouvements rétrogrades ni les variations d'intensité lumineuse. Cette lacune l'a amené à confier le problème aux mathématiciens de l'Académie, en particulier Eudoxe de Cnide.

L'utilisation que fait Platon de la géométrie n'est pas sans nous surprendre. Cependant, sa pensée a le mérite d'avoir suscité, tant chez ses disciples que dans la pensée occidentale, un grand intérêt pour les mathématiques. Le recours à l'abstraction pour parvenir aux Idées constitue une composante indissociable de la recherche moderne. Parmi les disciples de Platon qui se sont illustrés par leurs travaux en mathématiques, on peut citer Eudoxe, Menechme et son frère Dinostrate.

Boyer, Carl B. *A History of Mathematics*, New York, John Wiley & Sons, 1968, 717 p.

Collette, Jean-Paul. *Histoire des mathématiques*, Montréal, Éditions du Renouveau Pédagogique Inc., 1979 2 vol., 587 p.

Timée, Traduction de Luc Brisson, Flammarion, Paris, 1992.

## ÉQUATIONS DE LA TRANSMUTATION DES ÉLÉMENTS

$$2 \text{ (pyramide)} = 1 \text{ (cube)}$$

$$2 \text{ [feu]} = 1 \text{ [air]}$$

$$2 \times 4 \triangle = 8 \triangle$$

$$1 \text{ (pyramide)} + 2 \text{ (cube)} = 1 \text{ (dodecaèdre)}$$

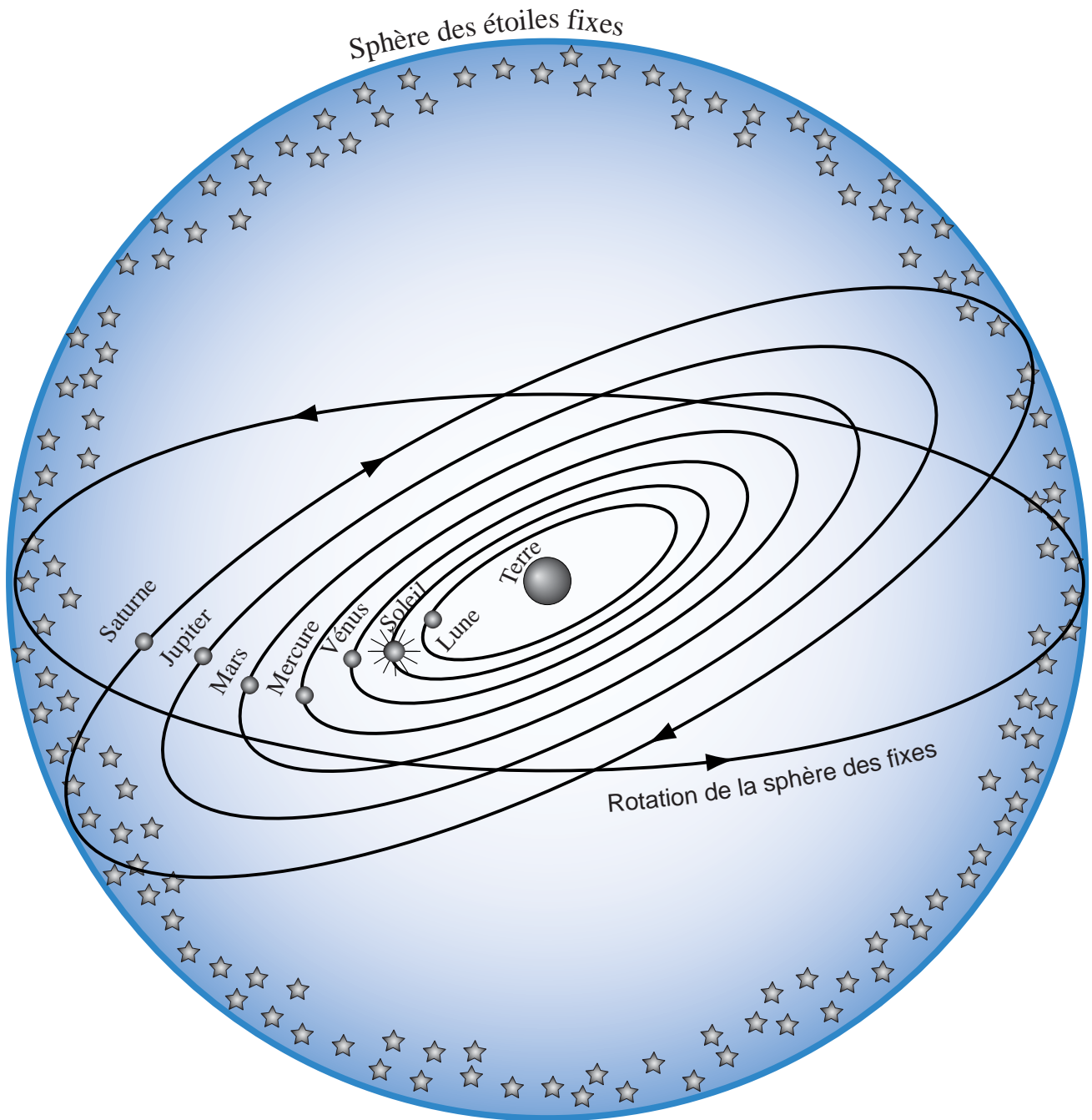
$$1 \text{ [feu]} + 2 \text{ [air]} = 1 \text{ [eau]}$$

$$1 \times 4 \triangle + 2 \times 8 \triangle = 20 \triangle$$

$$2 \text{ (1/2 cube)} = 1 \text{ (dodecaèdre)}$$

$$2 \text{ (1/2 [air])} = 1 \text{ [eau]}$$

$$2 \text{ (1/2} \times 8 \triangle) = 20 \triangle$$



Représentation de l'univers sphérique  
d'après la description du *Timée*